

# 非破壊検査のための弾性体理論と古典制御理論入門

中島 富男<sup>\*1</sup>  
Nakajima Tomio

## 1. はじめに

IIC REVIEW ではこれまでに何度か技術講座が連載されている。荒川による「非破壊検査技術」と題した連載がされた<sup>(1)-(6)</sup>。さらに、中代による「残留応力の基礎」<sup>(7)-(9)</sup>が連載され、三上による本号を含めて4回にわたる「機械振動入門」<sup>(10)-(13)</sup>が連載された。本技術講座では、これまでの技術講座を踏まえた上で、IIC が事業としているひずみ計測 (SM)、振動計測、超音波試験 (UT) およびアコースティックエミッション試験 (AE) と弾性体理論および古典制御理論との関係について概説する。

IIC ではひずみ計測や振動計測は主に計測事業部が担当し、超音波試験や AE 試験は主に検査事業部が担当している。ひずみ計測を行う場合には電気抵抗式ひずみゲージが用いられ、超音波試験を行う場合には圧電式超音波センサが用いられるという違いがあり、取得したデータの評価方法も異なる。しかし、被検体の弾性範囲内の現象であれば、力学的には同じ弾性理論に基づいている<sup>(14)</sup>。しかし、弾性理論の理解のためには一般的な力学で使用される数学に加えてベクトル解析やテンソルなどの知識を必要とし、一般にやや難解である。本技術講座の目的は弾性理論を概説することである。

近年、超音波探傷器や AE 計測器のデジタル化によりデータ評価技術が著しく進歩している。特にフェーズドアレイ超音波探傷装置に代表される画像処理を用いた超音波探傷技術は日進月歩である。しかし、超音波探傷は電気パルスを超音波センサの圧電効果により機械振動に変換し、被検体に弾性波である縦波や横波を伝播させ、再び超音波センサにより電気信号に変換している。

ひずみ計測では、被検体の伸びや縮みを電気抵抗式ひずみゲージにより電気信号に変換している。縦波や横波の伝播およびひずみ変化は力学的に扱われる現象である。理論的には連続体の力学<sup>(15)</sup>や弾性体理論<sup>(14)</sup>により記述される。しかし、超音波探傷もひずみ計測も、超音波探傷器やひずみ計測器の出力は電子回路を通過した電圧である。電圧は電磁気学の範疇である。つまり、我々は力学的な物理変化を電磁気学の物理量に変換して計測を行っている。

このように複数の物理法則を統合した系 (システム) を理解するためには、入出力信号を結びつける『伝達関数』もしくは『状態方程式』などの制御理論<sup>(16)</sup>の知識があると取得したデータからの物理現象の理解に役立つ。弾性理論や電磁気学は理学的には 19 世紀に確立されている。しかし、制御理論は力学や電磁気学の統合的な取り扱いのために、レーダー技術を端緒として 20 世紀になってから発展した工学的分野である。制御理論はラ

\*1: 研究開発センター 研究開発グループ 課長

プラス変換、フーリエ変換<sup>(17)</sup>およびZ変換などに加え、線形代数学の基礎を必要とする。本講座の二つ目の目的は、非破壊検査に必要と思われる古典制御理論の解説である。

本講座は三回にわたって連載する。第一回目は本稿であり、機械系と電気系を接続した計測系について概説する。第二回は、弾性体として最も基本的な等方性弾性体の力学について概説する。特に、今後重要性を増すと思われる超音波シミュレーションへの応用を想定したものとする。第三回は、非破壊検査で日常的に使用されるゲインや周波数特性といった用語に重点を置いて、古典制御理論について概説する。

なお、本講座では数学的および物理学的な厳密性は省略している。本講座よりもさらに詳細な知識の習得を望まれる方は、参考文献等を参照し、より高度な知識を身に付けられることを期待する。

## 2. 機械系と電気系の接続による計測とは

ひずみ計測、振動計測、超音波検査、AE検査は力学的現象を電磁気学の物量である電圧に変換して『計測』している。表1に各計測や検査で計測される物理量、センサ、計測器の例を示す。表1からセンサとして電気抵抗線（導線）の抵抗値変化もしくは圧電素子が広く使用されていることがわかる。被検体の力学的変化の周波数帯域に対応し、センサが選択され、センサに応じた信号調節器が用いられる。ひずみ計測では電気抵抗式ひずみゲージとひずみアンプが用いられ、加速度計測では圧電型加速度計と電荷（チャージ）アンプが用いられる。一方、超音波検査では超音波センサとパルサーレシーバーが用いられる。パルサーは超音波センサに能動的な信号を送信する装置であり、レシーバーは超音波センサの信号を受信し信号調節をする装置である。一般に電気信号の送受信の機能が単一のユニットとなっているため、パルサーレシーバーと呼ばれる。AE計測用のセンサは被検体そのものから発振される信号を受信するため、基本的にパルサー部はなく、レシーバー機能のみを有する。ただし、信号が微弱なためセンサ近傍にプリアンプが配置されることが特徴的である。

表1 主なセンサと原理および信号調節器

計測物理量	センサ	センサ原理	信号調節器
ひずみ	電気抵抗式ひずみゲージ	電気抵抗変化	ひずみアンプ
加速度	・ひずみゲージ式加速度計 ・圧電型加速度計	・電気抵抗変化 ・圧電効果	ひずみアンプ チャージアンプ
固体中弾性波	・圧電超音波センサ (AEセンサを含む)	・圧電効果	パルサーレシーバー

信号調節器は一般に四つの機能を有する。一つはセンサ原信号の電圧信号への変換である。次に信号の直流成分を通過させるか否かの機能である。この機能はカップリングと呼ばれる。ひずみ信号は電圧の直流成分を通過させる必要がありDCカップリングが使用される。一方、超音波検査はセンサの直流成分を通過させる必要がないためACカップリングが用いられる。DCカップリングとACカップリングの電気回路の差異は信号調節器の入力端子部にコンデンサを設けるかどうかである。三つ目の機能はセンサ信号の増幅である。これはゲインや利得という特性で呼ばれる。四つ目の機能はアナログ周波数フィルタ処理である。ひずみ測定や振動計測ではローパスフィルタが用いられる。一方、超音波検査やAE試験ではバンドパスフィルタが用いられる。

このように計測系の機能を分割していくと、制御理論で使われるブロック線図で表すと理解しやすい。すなわち、被検体からの時系列の入力信号を  $a(t)$ 、出力信号を  $b(t)$  とすると、信号の入出力はセンサに関わらず図1のように一般化できる。なお、超音波検査では、さらにパルサー機能もブロック化させる必要がある。

図1のブロック線図の各機能は古典制御理論においてはそれぞれ『伝達関数』と呼ばれる。このように機能を伝達関数で分割すると、力学的物理量と電磁気学的物理量をそれぞれの入出力（コンピュータ用語でのI/O処理）として関連付けることができる。

力学的物理量と電磁気学的物理量の変換を行うのがセンサの機能である。この物理量の変換も伝達関数として記述される。

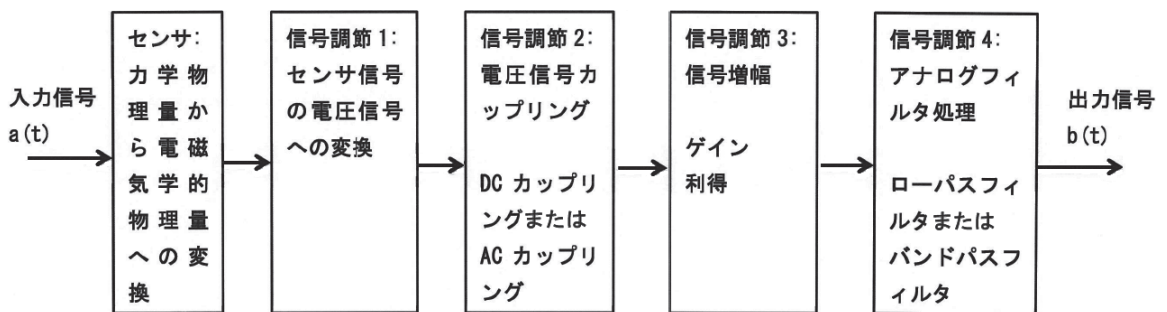


図1 一般的な計測系の信号の流れ

### 3. センサの代表例

#### 3.1 電気抵抗式ひずみゲージ

電気抵抗式ひずみゲージは直接被検体のひずみを計測することにも用いられるし、その応用としてロードセル、圧力計、変位計および加速度計としても利用される。

導線の抵抗値変化によりひずみを計測する原理は式 (1) に基づく<sup>(18)</sup>。

$$\varepsilon = \frac{dR}{R} \frac{1}{F} \quad (1)$$

ここで、 $R$  はひずみゲージの初期抵抗値、抵抗値の変動および  $F$  はゲージ率である。ゲージ率  $F$  は一般に定数として扱われる。

#### 3.2 圧電式センサ

圧電素子に応力を加えると電極間に電位差（分極）が発生する。また、電極間に電圧を印加すると圧電素子に応力が生じる。このような現象は圧電効果と呼ばれる<sup>(19)</sup>。圧電素子は表 1 に示す通り、加速度計や AE センサを含む超音波センサとして広く利用されているが、使われる周波数帯域に違いがある。代表的な周波数帯域の違いを図 2 に示す。なお、圧電式の加速度計と超音波センサの構造的な違いは、図 3 に示すように圧電式加速度計では圧電素子に負荷質量が取り付けられている。しかし、超音波センサには負荷質量はない。また、

圧電式加速度センサにより静加速度を計測できないことも付記しておく。静加速度を計測する必要がある場合にはひずみ式加速度計が用いられる。

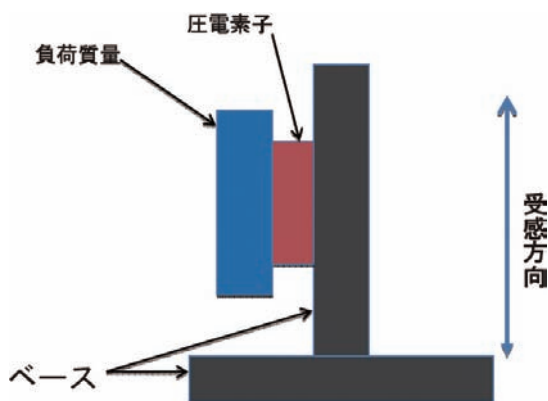


図 3 圧電型加速度センサ模式図（せん断タイプ）

#### 4. 力学系の静的取り扱いと動的取り扱い

弾性体の力学的取り扱いについては次回に解説する。その前段として、三上が解説してきた機械振動系を例にして、力学系の静的取り扱いと動的取り扱いが同一の関係から求まることに触れておく。

図 4 に例示するような質量  $m$  および線形バネ定数  $k$  のバネ-マス単振動系について考える。三上が機械振動入門（最終回）<sup>(13)</sup> で解説したように図 16 の系は加振台が外力  $F_0 e^{j\omega t}$  で加振されるとすると、系の運動方程式は、式 (2) のようになる。式 (2) において  $j$  は虚数単位である。一般に虚数

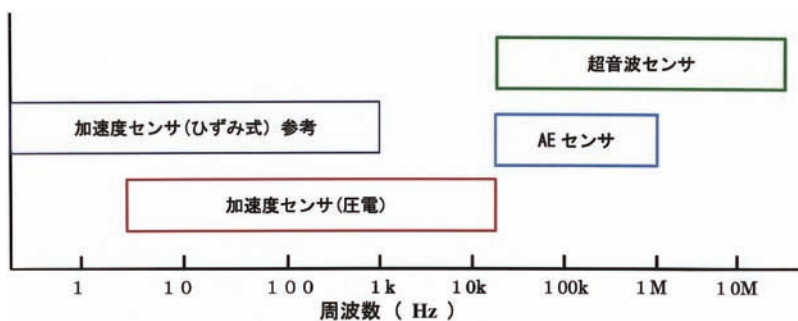


図 2 圧電式センサの周波数帯域の違い

単位は  $i$  で表されるが、制御理論や電気回路学では  $j$  とされる。理由は後述する。

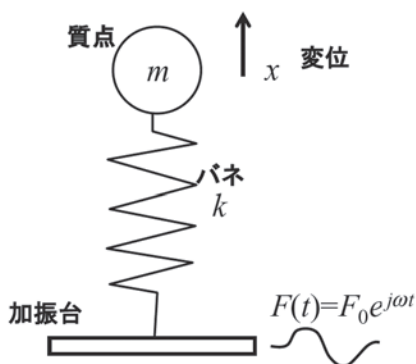


図4 減衰無バネ-マス単振動モデル

$$m\ddot{x} + kx = F_0 e^{j\omega t} \quad (2)$$

式 (2) の解は、 $m\ddot{x} + kx = 0$  の時の一般解と強制振動の特解の和である。ここで、初期条件が  $x=0$  かつ  $\dot{x}=0$  ならば、式 (2) の一般解は常に  $x=0$  のみとなるから、式 (2) は強制振動の特解のみで表される。式 (2) の特解は、式 (3) となる。

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3)$$

ここで、 $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  であり、図4 のバネ-マス単振動系の固有値である。

ここで、強制振動の周波数が図4 のバネ-マス振動系の固有値よりも非常に小さい  $\omega_0^2 \gg \omega^2$  場合を考える。このとき、式 (3) は以下のように近似される。

$$x(t) \approx \frac{F_0}{m} \frac{e^{j\omega t}}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m} \frac{e^{j\omega t}}{\frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k} e^{j\omega t}$$

さらに、 $\omega \ll 1$  であれば、 $e^{j\omega t} \approx 1$  のので、

$$x(t) \approx \frac{F_0}{k}$$

これを書きかえると、式 (4) のようになる。

$$F_0 \approx kx(t) \quad (4)$$

式 (4) は一次元のフックの法則を表している。

一般に構造物の強度剛性試験は準静的荷重試験と呼ばれる。厳密に静的な強度剛性試験をしようとする、周波数はゼロとなり、試験に無限大の時間を要する。そのため、実際には構造物の共振周波数より十分にゆっくりとした荷重負荷の試験を行う。そのため、『準静的』と呼ばれる。

次に、 $\omega^2 = 2\omega_0^2$  の場合を考える。

このとき、式 (3) は、式 (5) のようになる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m} \frac{e^{j\sqrt{2}\omega_0 t}}{\omega_0^2 - 2\omega_0^2} = -\frac{F_0}{m} \frac{e^{j\sqrt{2}\omega_0 t}}{\omega_0^2} = -\frac{F_0}{m} \frac{e^{j\sqrt{2}\omega_0 t}}{\frac{k}{m}} \\ &= -\frac{F_0}{k} e^{j\sqrt{2}\omega_0 t} \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) の振幅は準静的な場合の式 (4) と同じ大きさである。

よって、 $\omega^2 > 2\omega_0^2$  となると、変位振幅  $x(t)$  は式 (4) で与えられる準静的な振幅よりも小さくなる。周波数  $f$  で表せば式 (6) のようになる。

$$f = \frac{\omega}{2\pi} > \frac{\sqrt{2}\omega_0}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}f_0}{2\pi} \quad (6)$$

また、 $\omega^2 \gg \omega_0^2$  の場合を考える。この時、式 (3) は、式 (7) のように近似できる。

$$x(t) \approx -\frac{F_0}{m} \frac{e^{j\omega t}}{\omega^2} \quad (7)$$

式 (7) は、強制振動の角振動数  $\omega$ 、すなわち周波数  $f$  が2倍になると、変位振幅  $x(t)$  は4分の1、すなわち  $-12\text{dB}$  に小さくなることを表す。周波数が2倍になることを一般に1オクターブ変化するという。よって、式 (7) の関係は  $-12\text{dB/oct}$  と表す。oct はオクターブの略である。

ここではバネ-マス単振動系を例に取ったが、弾性体についても同様に静的な現象と動的な現象を同一の関係式により記述できる。

5. 伝達関数のラプラス変換表示およびバネ－マス単振動系と電気回路の類似性

図4のバネ－マス単振動系を4章では機械振動的扱いで検討した。5章では制御理論との関わり  
の深いラプラス変換を用いて考えることとする。

時間  $t$  の関数  $x(t)$  のラプラス変換の定義は式(8)で与えられる。

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt = \mathcal{L}[x(t)] \quad (8)$$

最右辺は関数  $x(t)$  にラプラス変換を適用したことを示す。次にラプラス変換でよく用いられる関係を三つ示す<sup>(20)</sup>。

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = s\mathcal{L}[x(t)] = sX(s) \quad (9)$$

同様に、

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = s(sX(s)) = s^2X(s) \quad (10)$$

さらに、

$$\mathcal{L}\left[\int x(t) dt\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[x(t)] = \frac{X(s)}{s} \quad (11)$$

なお、式(9)から式(11)において、初期条件  $x(0)=0$ 、 $dx(t)/dt=0$  を前提としている。式(9)は  $x(t)$  の一階微分をラプラス変換した場合で  $sX(s)$ 、式(10)は二階微分の場合であり、 $s^2X(s)$  となっている。すなわち、原関数  $x(t)$  のラプラス変換後の  $X(s)$  に  $s$  を掛けると微分を表す。一方、原関数  $x(t)$  を積分すると、 $X(s)$  を  $s$  で割ることになる。これは式(11)に示した通りである。このように、ラプラス変換を利用すると関数の微分操作と積分操作を簡略に表記できる。

表2にラプラス変換によく使用される原関数と変換後の関数を示す。制御理論において、オイラー数  $e$  のべき乗や三角関数のラプラス変換は重要である。

式(9)、式(10)および式(11)と表2を用いて、式(3)の左辺と右辺両方にラプラス変換を行うと

表2 ラプラス変換表

$x(t)$	$X(s)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

$$\mathcal{L}[m\ddot{x} + kx] = \mathcal{L}[F_0 e^{j\omega t}]$$

$$s^2 mX(s) + kX(s) = \mathcal{L}[F_0 e^{j\omega t}]$$

$$(ms^2 + k)X(s) = \mathcal{L}[F_0 e^{j\omega t}]$$

$$(s^2 + \omega_0^2)X(s) = \frac{1}{m}\mathcal{L}[F_0 e^{j\omega t}]$$

$F_0 e^{j\omega t}$  が系への入力とし、出力が  $x(t)$  と考えると、入力と出力の関係は、

$$\frac{X(s)}{\mathcal{L}[F_0 e^{j\omega t}]} = \frac{1}{m} \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)} \quad (12)$$

式(12)の左辺の分母を任意の力入力  $F(t)$  に置き換えると、

$$\frac{X(s)}{\mathcal{L}[F(t)]} = \frac{1}{m} \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)} \quad (13)$$

式(12)と式(13)は入力に関係なく右辺が同一である。これは、図4のバネ－マス単振動系への任意の力の入力  $F(t)$  と出力である変位  $x(t)$  の関係は、ラプラス変換で表すと変化しないことを意味する。式(13)は古典制御理論において伝達関数と呼ばれる。

ここまでは、力学系を用いて説明してきたが、簡単な電気系の例を示す。図5のコイルとコンデンサが直列に接続された簡単な電気回路を示す。図5の回路を流れる電流  $i(t)$  は式(14)により計算できる。

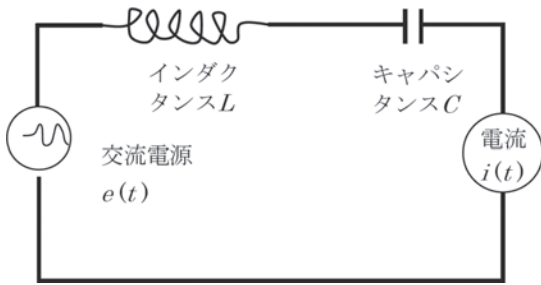


図5 コイルとコンデンサの交流回路

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t) \quad (14)$$

式(14)の両辺を一階微分すると、式(15)を得る。

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{de(t)}{dt} \quad (15)$$

ここで、電流に記号  $i$  を使用した。式(2)において虚数単位を  $j$  としたのは、電流  $i$  との混同を避けるためである。

式(14)をラプラス変換すると、式(16)を得る。なお、初期条件は全てゼロである。

$$s^2 L I(s) + \frac{1}{C} I(s) = \mathcal{L} \left[ \frac{de(t)}{dt} \right] = sE(s) \quad (16)$$

式(15)の入力を  $\frac{de(t)}{dt}$  として、出力を  $i(t)$  とする伝達関数は式(16)から式(17)のように求まる。

$$(s^2 L + \frac{1}{C}) I(s) = sE(s)$$

$$(s^2 + \frac{1}{LC}) I(s) = \frac{1}{L} sE(s)$$

$$\frac{I(s)}{sE(s)} = \frac{1}{L} \frac{1}{(s^2 + \omega_0^2)} \quad (17)$$

式(17)において  $\omega_0^2 = 1/LC$  であり、LC回路(コイルとコンデンサの電気回路)の固有値である。

式(13)と式(17)の右辺は数学的に同一である。つまり、ラプラス変換を適用することにより力学系と電気系から同一の関係が導出できる。古典制御理論では主にラプラス変換を用いて系(システ

ム)を記述する。このことにより、力学系と電気系を区別せずに系(システム)を記述できる。

なお、式(13)において、 $s = j\omega$  と置き換えると、式(18)を得る。

$$\frac{X(j\omega)}{\mathcal{L}[F(t)]} = \frac{1}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (18)$$

この式は式(3)を変形した、式(19)と等価である。

$$\frac{x(t)}{F_0 e^{j\omega t}} = \frac{1}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (19)$$

古典制御理論ではラプラス変換演算子  $s$  と角振動数  $j\omega$  を同等に扱う。よって、4章の  $\omega^2$  と  $\omega_0^2$  の大小関係に関する考察は、図5および式(15)のLC回路にもそのまま適用できる。

## 5. まとめ

我々の知りたい物理量は力学的な変位であったり、ひずみであったり、圧力であったりするが、それらは、電圧に変換されて計測されることを概説した。計測器のデジタル化とともに計測原理の理解よりも装置操作方法の習得に多くの時間を割くことが必要になっている。しかし、ひずみ計測、振動計測および超音波検査は力学的物理量の計測が本質である。そのためには、使用しているセンサや計測装置の原理や特性を把握していることが重要である。

今回は本稿の4章で触れた力学的に静的な変化と動的な変化について、等方性弾性体の理論を基に概説し、その基礎となる力学現象が同一の理論に基づくことを示す。

## 参考文献

- (1) 荒川敬弘、“非破壊検査技術 第1回 非破壊検査技術の動向と基礎”、IIC REVIEW、No. 30、(2003)、pp.13-23
- (2) 荒川敬弘、“非破壊検査技術 第2回 超音波探傷の基礎 (超音波の性質)”、IIC REVIEW、No. 31、(2004)、pp.4-12
- (3) 荒川敬弘、“非破壊検査技術 第3回 超音波探傷の基礎 (探傷方法)”、IIC REVIEW、No. 32、(2004)、pp.2-11
- (4) 荒川敬弘、“非破壊検査技術 第4回 超音波探傷試験の検出性”、IIC REVIEW、No. 33、(2005)、pp.2-11
- (5) 荒川敬弘、“非破壊検査技術 第5回 超音波探傷試験のサイジング”、IIC REVIEW、No. 34、(2005)、pp.2-11
- (6) 荒川敬弘、“非破壊検査技術 第6回 最近の超音波探傷”、IIC REVIEW、No. 35、(2006)、pp.2-11
- (7) 中代雅士、“残留応力の基礎”、IIC REVIEW、No.38 (2007)、pp.2-6
- (8) 中代雅士、“残留応力の基礎 (その2) 残留応力計測方法の紹介”、IIC REVIEW、No.39 (2008)、pp.2-10
- (9) 中代雅士、“残留応力の基礎 (その3) 数値解析法による残留応力評価と今後の残留応力技術動向の紹介”、IIC REVIEW、No.41 (2009)、pp.2-9
- (10) 三上隆男、“機械振動入門 (第1回)”、IIC REVIEW、No.46 (2011)、pp.3-9
- (11) 三上隆男、“機械振動入門 (第2回)”、IIC REVIEW、No.47 (2012)、pp.3-9
- (12) 三上隆男、“機械振動入門 (第3回)”、IIC REVIEW、No.48 (2012)、pp.3-8
- (13) 三上隆男、“機械振動入門 (最終回)”、IIC REVIEW、No.49 (2013)、pp.2-12
- (14) L. D. Landau, E. M. Lifshitz, “Theory of Elasticity 3rd Edition”, Butterworth-Heinemann Linacre House, Jordan Hill Oxford OX2 (1986)
- (15) P. チャドウィック、“連続体力学”、ブレイン書店 (1979)
- (16) 近藤文治編、“基礎制御工学”、森北出版 (1977)
- (17) 日野幹夫、“スペクトル解析”、朝倉書店 (1977)
- (18) 岩田耕一、久保速雄、岩垣博行、岩橋善久、“新版機械計測”、朝倉書店 (1995)、pp.30-33
- (19) 宇野良清、津谷昇、新関駒二郎、森田章、山下次郎 訳、“キッテル固体物理学入門 第8版 下巻”、丸善 (2005)、pp.515-516
- (20) 一般社団法人日本機械学会、“機械実用便覧 改訂 第7版”、丸善出版 (2011)、pp.26-27



研究開発センター  
研究開発グループ  
課長

中島 富男

TEL. 045-791-3522

FAX. 045-791-3547